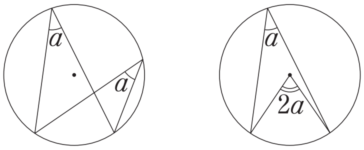
第13講　正弦定理・余弦定理

PART1　正弦定理

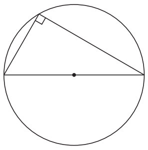
要点①　円に内接する四角形の対角の和

円周角の定理



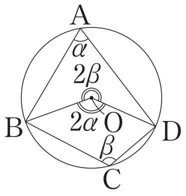
> 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。

により，以下のことがわかる。



> 半円の弧に対する円周角の大きさは $90°$ である。

ここでは，円周角の定理を利用して，円に内接する四角形の対角の和を求める。



右図より $2\alpha+2\beta=360°$

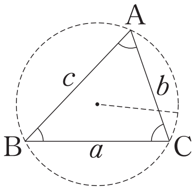
$\alpha+\beta=180°$

よって $\angle A+\angle C=180°$

同様に $\angle B+\angle D=180°$

したがって，円に内接する四角形の対角の和は $180°$ である。

要点②　正弦定理



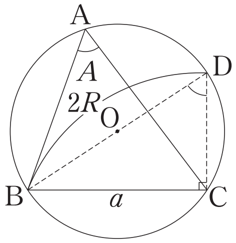
以降は，△ABC の3つの角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a，b，c とする。

また，三角形の3つの頂点を通る円はただ1つに定まる。

この円を，その三角形の「　　　　　」という。

ここでは，△ABC の3つの辺の長さ a，b，c と3つの角の正弦 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，および △ABC の外接円の半径との間に成り立つ関係について考える。

△ABC の外接円の中心を O，半径を R とする。



[1]　A が鋭角のとき

右図の直角三角形 BCD において

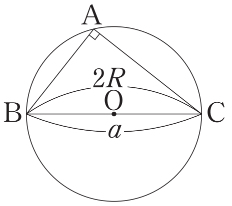
$a=$

円周角の定理から $D=$

よって $a=2R\sin A$

[2]　A が直角のとき

右図の直角三角形 ABC において



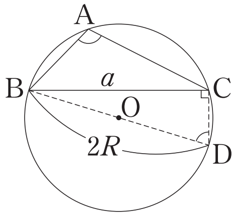
$a=2R$

ここで，$\sin 90°=1$ であるから

$a=2R\cdot 1=2R\sin 90°=2R\sin A$

[3]　A が鈍角のとき

右図の直角三角形 BCD において



$a=$

四角形 ABDC は円に内接するから

$A+D=$

よって $a=2R\sin D=2R\sin(\qquad\qquad)=2R$

[1] ~ [3] より $a=2R\sin A$　すなわち　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

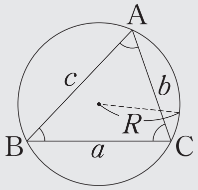
同様に $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つ。

以上より，次の定理が成り立つ。

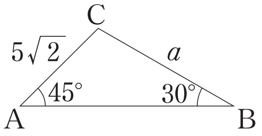
正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



例　△ABC において，$b=5\sqrt{2}$，$A=45°$，$B=30°$ のとき，a と外接円の半径 R を求める。

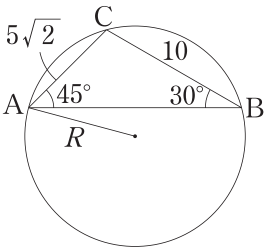


正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$\underline{\qquad\quad}=\underline{\qquad\quad}$

よって　$a=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 30°}\times\sin 45°=5\sqrt{2}\div\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10$

正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ であるから $\underline{\qquad\quad}=$



よって　$R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2\sin 30°}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{1}{2}}=5\sqrt{2}$

1　(1)　△ABC において，$b=5$，$B=45^\circ$, $C=75^\circ$ のとき，a を求めよ。また，△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

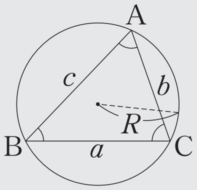
(2)　$c=2\sqrt{3}$ である △ABC において，外接円の半径が $R=2$ のとき，C を求めよ。

Point Pickup

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



ある辺の長さとその対角の大きさが与えられたとき，

正弦定理を利用して，他の辺の長さや角の大きさ，外接円の半径を求めることができる。

外接円の半径が与えられた場合も，正弦定理の利用を考える。

第13講 PART1 確認問題

1 △ABC において，$b=2$，$B=45°$，$C=60°$ のとき，

$c=\sqrt{\boxed{ア}}$ である。

2 △ABC において，外接円の半径を R とすると，

$a=6$，$A=120°$ のとき，$R=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$ である。

3 △ABC において，外接円の半径を R とする。

$b=2$，$R=\sqrt{2}$ のとき，

$B=\boxed{エオ}°$ または，$\boxed{カキク}°$ である。

第 13 講　正弦定理・余弦定理

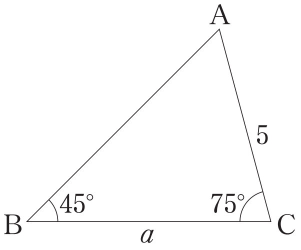
PART1　正弦定理

1　(1)　△ABC において，$b=5$，$B=45^\circ$, $C=75^\circ$ のとき，a を求めよ。また，△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(2)　$c=2\sqrt{3}$ である △ABC において，外接円の半径が $R=2$ のとき，C を求めよ。

[解答]

(1)　$A+B+C=180^\circ$ より



$A=180^\circ-B-C=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

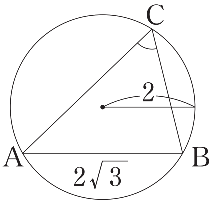
つまり $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}$

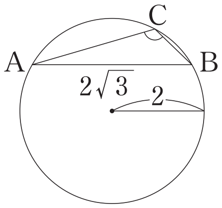
よって $a=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=5\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

また，正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ つまり $\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{5}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(2)　正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R$





つまり $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}=4$

よって　$\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$ より $C=60^\circ$，120°

第13講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

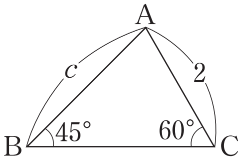
正弦定理より，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ [A]

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$c=\frac{2}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=2\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

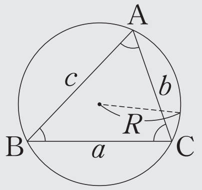
$$=\sqrt{6}$$



[A]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



2

[正解] イ：2，ウ：3

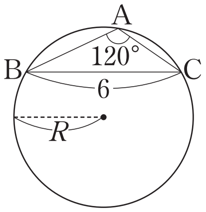
[解説]

正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$ [B]

$$\frac{6}{\sin 120^\circ}=2R$$

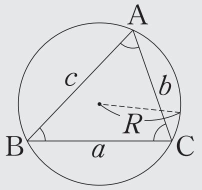
$$R=\frac{3}{\sin 120^\circ}=3\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$



[B]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



3

[正解] エオ：45，カキク：135

[解説]

正弦定理より，

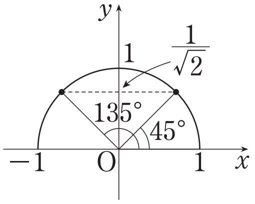
$$\frac{b}{\sin B}=2R$$ [C]

$$\frac{2}{\sin B}=2\sqrt{2}$$

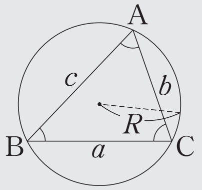
$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ<B<180^\circ$ より，

$$B=45^\circ,\ 135^\circ$$



[C]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$